ECUACIONES DIFERENCIALES **12 Marzo 2013** Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática, UPM	1[er] APELLIDO: ________ 2[o] APELLIDO: ________ NOMBRE: ________ N[o] MATRÍCULA:	TIEMPO: **2 horas** PUNTOS: NOTA FINAL:

1. (2 puntos) Comprobar que la ecuación $(x^4 - x + y)dx - xdy = 0$ no es diferencial exacta, hallar un factor integrante que depende sólo de una variable y resolver la ecuación.

   Solución. Sean $P(x, y) = x^4 - x + y$, $Q(x, y) = -x$. Se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-2}{x}$$

   Luego existe una factor integrante que depende sólo de x que verifica $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-2}{x}$. Resolviendo se encuentra un factor integrante $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Así, $x^{-2}(x^4-x+y)dx-xdy) = 0$ es diferencial exacta. Hay que hallar una función $U(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 - x + y}{x^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{x}.$$

   Entonces $U(x, y) = \frac{-y}{x} + \varphi(x)$. Derivando esta expresión respecto de la variable x y usando la identidad primera de las mostradas arriba, se concluye $\varphi'(x) = \frac{x^4-x}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x}$. Integrando se obtiene $\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + K$, $K \in \mathbb{R}$. La solución general de la ecuación deiferencial es $\frac{-y}{x} + \frac{x^3}{3} - \ln|x| = C$, y en forma explícita $y = \frac{x^4}{3} - x\ln|x| - Cx$ con $C \in \mathbb{R}$. □

2. (2 puntos) Sea la ecuación lineal $x^2y'' - xy' - 3y = 0$. Comprobar que $y_1(x) = x^3$ es una solución. Hallar una solución linealmente independiente con y_1 en el intervalo $(0, \infty)$ usando la fórmula de Liouville. Escribir la expresión general de la solución de la ecuación en $(0, \infty)$.

   Solución. Aplicando la fórmula de Liouville

$$\begin{vmatrix} x^3 & y \\ 3x^2 & y' \end{vmatrix} = Ke^{\int \frac{dx}{x}}, \quad K \neq 0$$

   De aquí $x^3y' - 3x^2y = Kx$. Esto es, $y' - \frac{3}{x}y = \frac{K}{x^2}$. Resolviendo esta ecuación lineal obtenemos $y(x) = Cx^3 + \frac{-K}{4x}$ con $C \in \mathbb{R}$, luego $y_2(x) = \frac{1}{x}$ es otra solución de la ecuación inicial linealmente independiente con $y_1(x) = x^3$ en $(0, \infty)$ y la solución general es $y(x) = C_1x^3 + C_2\frac{1}{x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

   □

3. (2 puntos) (i) Hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $y'''-6y''+9y' = 0$. (ii) Encontrar una solución particular de $y''' - 6y'' + 9y' = e^x$ y dar la solución general de la ecuación.

   Solución. El polinomio característico asociado a la ecuación es $P_c(\lambda) = \lambda^3-6\lambda^2+9\lambda$ y sus raíces son $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad $m_2 = 2$. Un sistema fundamental de soluciones es $\{1, e^{3x}, xe^{3x}\}$. Se puede usar el método de similitud y ensayar una solución de la forma $y_p(x) = ae^x$. Sustituyendo esta función y sus derivadas en la ecuación completa nos queda $4ae^x = e^x$, luego $a = \frac{1}{4}$.

La solución general de la ecuación completa es

$$y(x) = C_1 + C_2e^x + C_3xe^{3x} + \frac{1}{4}e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

4. (0.8 punto) Transformar la ecuación $y' - \frac{2}{x}y = -x^2y^2$ en una ecuación lineal con un cambio de variable adecuado.

SOLUCIÓN. Es una ecuación de Bernouilli. Con el cambio $z(x) = \frac{1}{y(x)}$, se obtiene $z' = \frac{-y'}{y^2}$. La ecuación dada se transforma en la ecuación lineal

$$-z' - \frac{2}{x}z = -x^2$$

$\square$

5. (i) Dado que $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$ son dos soluciones $y'' + y = 0$. Hallar la solución que cumple las condiciones iniciales $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$

SOLUCIÓN. La solución general es $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Por tanto, $y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$. Con la condición inicial $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ se obtiene $C_1 = 1$ y con la condición $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ resulta $C_2 = -1$. La solución que cumple las condiciones iniciales es

$$y(x) = \sin x - \cos x$$

$\square$

(ii) Describir el procedimiento de variación de las constantes para la ecuación $y'' + y = x$.

SOLUCIÓN. Podemos observar que $y_p(x) = x$ es una solución particular de la ecuación completa. Puesto que conocemos dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogéna asociada, podemos escribir la solución general que será de la forma $y(x) = K_1 \sin x + K_2 \cos x + x$ con $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. El método de variación de las constantes para resolver la ecuación completa consiste en ensayar soluciones del tipo $y(x) = c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x$, con $c_1(x)$ y $c_2(x)$ tal que sus derivadas verifican el sistema

$$\begin{aligned} c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x &= 0 \\ c_1'(x) \cos x - c_2'(x) \sin x &= x \end{aligned}$$

De aquí,

$$c_1'(x) = x \cos x, \quad c_2'(x) = -x \sin x$$

Integrando,

$$c_1(x) = x \sin x + \cos x + K_1, \quad c_2(x) = x \cos x - \sin x + K_2, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo estas expresiones en $y(x) = c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x$ se obtiene la solución general. $\square$